

# Lichtwegänderungen bei dynamischer Belastung von Plexiglasscheiben

E. HÄUSLER, V. SCHMITZ und W. STUMM

Institut für Angewandte Physik und Elektrotechnik der Universität des Saarlandes

(Z. Naturforsch. 24 a, 1627—1631 [1969]; eingegangen am 26. Juni 1969)

Die Lichtablenkung durch eine elastisch beanspruchte homogene isotrope Scheibe wird sowohl für den ebenen als auch für den nichtebenen Spannungszustand auf die Dicken- und Dichteänderung bzw. Brechungsindexänderung zurückgeführt. Die theoretischen Zusammenhänge werden für den Fall der Belastung mit Ultraschalldehnungswellen hergeleitet. Mit Hilfe einer schlierenoptischen Anlage werden Querkontraktion, Schubwellengeschwindigkeit und dynamischer Elastizitätsmodul und mit Hilfe eines punktförmigen Abtastverfahrens (Lichtwegänderungen von  $10^{-5}$  mm werden aufgelöst) die Anteile der Dicken- und Brechungsindexänderung zur Lichtablenkung bestimmt. Für dünne Scheiben sind Dicken- und Dichteänderung einander proportional, für dicke Scheiben ergibt sich, daß bei Dickenvergrößerung der Scheibe in deren Innern die mittlere Dichte abnimmt.

## 1. Einführung

Optische Methoden zur Untersuchung von elastischen Spannungs- und Deformationszuständen beruhen darauf, daß Wellenflächen und Intensitäten des durch das Modell gehenden oder am Modell reflektierten Lichtes beeinflußt werden. Es existieren einfache Verfahren, die es gestatten, die Verformung von Lichtwellenflächen direkt durch Interferenzverfahren bzw. durch Messung der Lichtablenkung (schattenoptisches Rasterverfahren, Moiré-Verfahren) zu bestimmen. Zur Auswertung benötigt man den Zusammenhang zwischen den elastischen Spannungen und Verformungen einerseits und den Lichtwegänderungen bzw. Lichtablenkungen andererseits. Dieser Zusammenhang kann für einige einfache, jedoch praktisch wichtige Fälle angegeben werden.

## 2. Theorie

### 2.1. Der ebene Spannungszustand

Einer der einfachsten Fälle liegt beim ebenen Spannungszustand spannungsoptisch isotroper Medien vor, d. h. wenn alle Spannungen senkrecht zur Oberfläche eines scheibenförmigen Modelles verschwinden, eine Forderung, die in der Praxis darauf hinausläuft, daß diese Spannungen klein sein müssen gegenüber den Spannungen, die parallel zur Modelloberfläche auftreten. Für diesen Fall erhält man aus der Spannungs-Dehnungs-Beziehung zwei Gleichungen, die sowohl die relative Dickenänderung  $\Delta d/d$  der Scheibe als auch die relative Dichteänderung  $\Delta \rho/\rho$  mit den Hauptspannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  verknüpfen. Als Proportionalitätskonstanten treten hier-

bei auf die Querkontraktion  $\nu$  und der Elastizitätsmodul  $E$ :

$$\begin{aligned}\Delta d/d &= -(\nu/E)(\sigma_1 + \sigma_2), \\ \Delta \rho/\rho &= -[(1 - 2\nu)/E](\sigma_1 + \sigma_2).\end{aligned}\quad (1)$$

Der Quotient aus relativer Dichteänderung zur relativen Dickenänderung — im folgenden Lichtablenkungsfunktion  $F$  genannt — ergibt für den ebenen Spannungszustand eine Konstante:

$$\frac{\Delta \rho/\rho}{\Delta d/d} = F = (1 - 2\nu)/\nu.\quad (2)$$

Hier lassen sich also Dicken- und Brechungsindexänderung (letzte ist proportional zur Dichteänderung  $\Delta n/n = b \cdot \Delta \rho/\rho$ ,  $b$  eine elasto-optische Konstante) getrennt durch die Hauptspannungen ausdrücken. Zwischen der Hauptspannungssumme  $(\sigma_1 + \sigma_2)$  einerseits und den zu messenden Lichtwegänderungen andererseits besteht ein einfacher Zusammenhang (Gesetz von Favre), der für ein spannungsoptisch isotropes Medium lautet:

$$\Delta s = d \cdot a \cdot (\sigma_1 + \sigma_2),\quad (3)$$

wobei  $a < 0$  eine elasto-optische Konstante ist. Bei bekannter elasto-optischer Konstante  $a$  (HENSCHEN<sup>1</sup>:  $a \sim 1,06 \cdot 10^{-5}$  cm<sup>2</sup>/kp für Plexiglas) lassen sich somit durch Messung der Lichtwegänderung die zur Lichtablenkung beitragende relative Dicken- und Dichteänderung bestimmen:

$$\begin{aligned}\Delta \rho/\rho &= -[(1 - 2\nu)/E](1/d a) \Delta s \\ \Delta d/d &= -(\nu/E)(1/d a) \Delta s\end{aligned}\quad (4)$$

<sup>1</sup> H. HENSCHEN, Interferometrische Untersuchungen der Spannungsverteilung vor dem laufenden Bruch im Kunststoff CR-39, Dissertation, Freiburg i. Br. 1962.



2.2. Lichtwegänderungen durch ebene Plattenwellen

Bei statischer Belastung dünner Scheiben liegt der ebene Spannungszustand vor. Bei dynamischer Belastung kann der Spannungszustand im allgemeinen nicht mehr als eben angenommen werden. Die auftretenden Abweichungen sollen im folgenden näher untersucht werden.

In einer festen elastischen Platte können sich folgende Plattenwellen ausbreiten: Dehnungswellen mit zur Mittelebene der Platte symmetrischen Teilchenverschiebungen, Biegewellen mit Teilchenbewegungen antisymmetrisch zur Mittelebene, SH-Wellen, d. h. Schubwellen mit Teilchenbewegungen parallel zur Plattenfläche und Rand-Rayleigh-Wellen. Die einzelnen Typen der Plattenwellen breiten sich in verschiedenen Modes aus. Im folgenden werden für die dynamische Belastung speziell die Dehnungswellen ausgewählt. Ihre Phasengeschwindigkeit hängt stark von der Querkontraktion  $\nu$ , der Scheibendicke  $d$  und der Schubwellenlänge  $\lambda_s$  ab (Abb. 1). Für

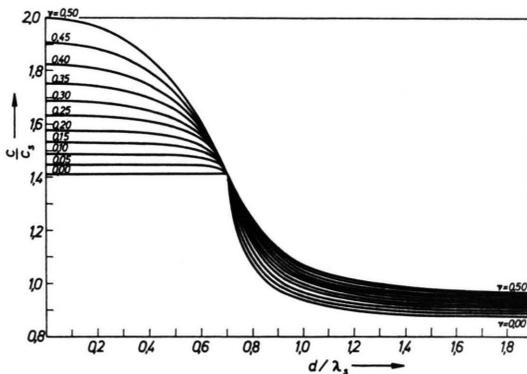


Abb. 1. Phasengeschwindigkeit des 1. Modes der Dehnungswelle.

sehr kleine  $d/\lambda_s$  unterscheiden sich die zu den verschiedenen Parametern  $\nu$  gehörenden Kurvenzweige am stärksten. Mit wachsendem  $d/\lambda_s$  nimmt die Phasengeschwindigkeit laufend ab und wird für  $d/\lambda_s = \sqrt{2}$ ,  $c/c_s = 1/\sqrt{2}$  unabhängig von der Querkontraktion, ein Effekt, der zur experimentellen Bestimmung der Schubwellen-Geschwindigkeit eines

Modellmaterials mit unbekannter Querkontraktion benutzt wird. Für weiter wachsendes  $d/\lambda_s$  nähert sich die Phasengeschwindigkeit der Dehnungswelle der Rayleigh-Wellengeschwindigkeit des elastischen Halbraumes.

Wie für den ebenen Spannungszustand soll für den Fall der dynamischen Belastung mit Dehnungswellen der Zusammenhang zwischen den elastischen Spannungen und Verformungen einerseits und den Lichtwegänderungen bzw. Lichtablenkungen andererseits hergeleitet werden.

Ein Lichtstrahl, der das zunächst unbelastete Modell senkrecht durchsetzt, legt von einem Punkt A vor dem Modell zum Punkt B hinter dem Modell den optischen Weg  $s$  zurück:

$$s = n_0 \cdot \overline{AB} + (n - n_0) d, \tag{5}$$

$n_0 = 1$  (umgebendes Medium: Luft). Bei Belastung erfährt der Strahl eine Weglängenänderung derart, daß

$$\Delta s = d \cdot \Delta n + (n - 1) \Delta d \tag{6}$$

oder, wenn man die Brechungsindexänderung auf die Dichteänderung zurückführt:

$$\Delta s = d n b \cdot \Delta \rho / \rho + d(n - 1) \cdot \Delta d / d. \tag{7}$$

Durch Messung der Lichtwegänderung  $\Delta s$  lassen sich in diesem Fall die zur Lichtablenkung beitragenden Anteile der Dichte- und Dickenänderung nicht mehr getrennt bestimmen. Es wird daher ein formelmäßiger Zusammenhang zwischen der relativen Dichte- und der relativen Dickenänderung gesucht. Setzt man an Stelle der relativen Dichteänderung die über die Scheibendicke gemittelten Teilchenbewegungen  $^2 [\Delta \rho / \rho = -(\partial u / \partial x + \partial w / \partial z)]$  mit  $u =$  Teilchenbewegung in Fortpflanzungsrichtung  $x$  der elastischen Welle und  $w =$  Teilchenbewegung in  $z$ -Richtung senkrecht zur Oberfläche und für die Dickenänderung die Teilchenbewegung an der Oberfläche der Scheibe, so erhält man eine Funktion, die in komplizierter Weise mit der Frequenz  $f$ , der Scheibendicke  $d$ , den elastischen Größen  $E$  und  $\nu$  und den Schubwellen- und Dehnungswellen-Geschwindigkeiten zusammenhängt:

$$F = -1 + \frac{2 c_t^4 / r^4 - c_t^2 / c^2}{c_t^2 / c^2 - (1 - 2 \nu) / (2 - 2 \nu)} \cdot \left[ 1 - \frac{1 - \frac{1}{2} (c^2 / c_t^2) \sqrt{c_t^2 / c^2 - (1 - 2 \nu) / (2 - 2 \nu)}}{\sqrt{c_t^2 / c^2 - 1}} \frac{\tan[\pi (d / \lambda_t) \sqrt{c_t^2 / c^2 - 1}]}{\tanh[\pi (d / \lambda_t) \sqrt{c_t^2 / c^2 - (1 - 2 \nu) / (2 - 2 \nu)}}] \right]. \tag{8}$$

<sup>2</sup> W. MOHR, Diplomarbeit, Saarbrücken 1967.

Das Ergebnis einer numerischen Auswertung für den ersten Mode der Dehnungswelle zeigt Abb. 2, in der dieses Verhältnis gegen  $d/\lambda_s$  aufgetragen ist mit der Poisson-Konstanten  $\nu$  als Parameter.

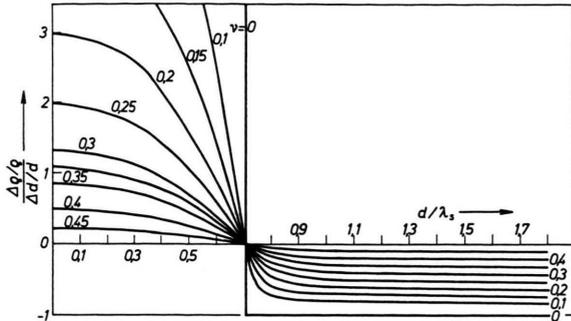


Abb. 2. Verhältnis der relativen Dichte- zur relativen Dickenänderung bei Dehnungswellen. Parameter: Poisson-Konstante  $\nu$ .

Im ebenen Spannungszustand ( $d/\lambda_s = 0$ ) hat  $F$  den Wert  $F = (1 - 2\nu)/\nu$ . Für wachsendes  $d/\lambda_s$  nimmt  $F$  ab und wird für  $d/\lambda_s = \frac{1}{2}\sqrt{2}$  unabhängig von  $\nu$  gleich Null. Die Dichteänderung verschwindet an dieser Stelle im Mittel, da die Dehnungswelle dort aus zwei unter  $45^\circ$  auf die Plattenflächen einfallenden Schubwellen (SV-Wellen) besteht, die an den Grenzflächen nicht in andere Wellenarten umwandeln. Für weiter wachsendes  $d/\lambda_s$  wird  $F$  negativ, die mittlere Dichte- und Dickenänderung laufen entgegengesetzt. Die  $\nu$ -Abhängigkeit von  $F$  wird um so größer, je kleiner die Poisson-Konstante des Modellmaterials ist.

### 3. Experimentelle Untersuchung

#### 3.1. Bestimmung der elastischen Konstanten

Die theoretisch hergeleiteten Beziehungen für ebene und nichtebene Spannungszustände wurden experimentell geprüft und zusätzlich die Proportionalitätskonstante zwischen Dichte- und Brechungsindexänderung bestimmt. Voraussetzung hierzu ist eine genaue Kenntnis der Materialkonstanten  $\nu$  und  $c_s$ , die durch Wellenlängenmessung der angeregten Dehnungswelle bestimmt werden.

Die Ultraschall-Wellenimpulse ( $f = 100$  kHz bis  $400$  kHz) werden in Scheiben von  $d = 1,5$  mm bis  $d = 6$  mm mit Keramikschiwingern erzeugt. Kurzzeitschlierenaufnahmen geben einen Überblick über das Wellenfeld (Abb. 3) und gestatten es, durch Messung der US-Wellenlänge die elastischen Konstanten zu bestimmen (siehe Tab. 1).

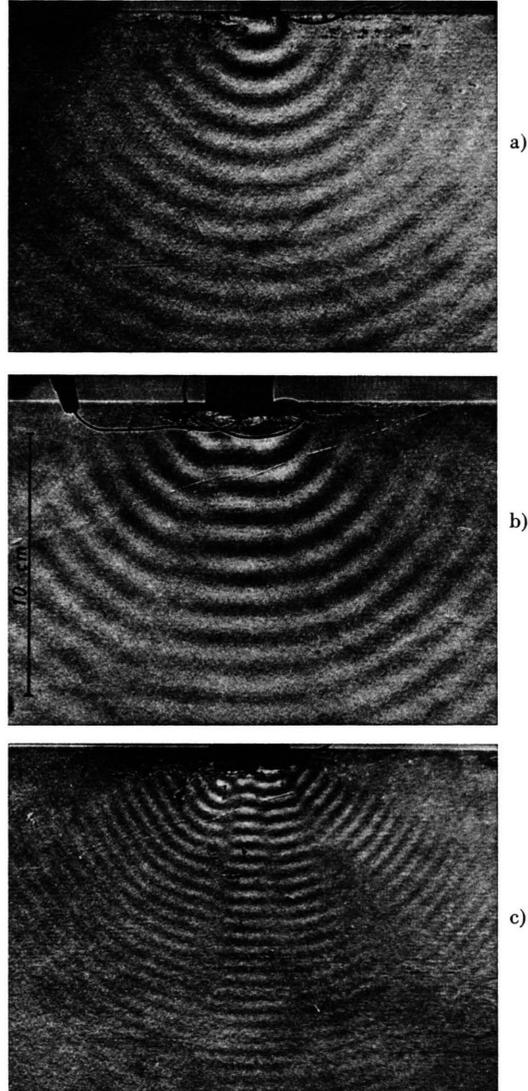


Abb. 3. Kurzzeitschlierenaufnahmen von Ultraschall-Dehnungswellenimpulsen in Plexiglasscheiben.

- a)  $f = 200$  kHz,  $d = 2,5$  mm;
- b)  $f = 200$  kHz,  $d = 1,5$  mm;
- c)  $f = 400$  kHz,  $d = 1,5$  mm.

#### 3.2. Die elastooptische Konstante $b$

Zur Messung des Verlaufs der Lichtablenkungsfunktion  $F = F(f, d, \nu)$  und zur Bestimmung der elastooptischen Konstante  $b$  müssen die Änderungen des Brechungsindex und der Dicke getrennt durch zwei unabhängige Messungen bestimmt werden. Man erhält sie, indem man die Ablenkung des Lichtstrahles durch das belastete Modell einmal in Reflexion und zum anderen in Durchsicht bestimmt. In Reflexion wird der Strahl unabhängig von den

elastischen Konstanten durch die Änderung der Modelldicke abgelenkt:  $\alpha_R = (\partial/\partial x) \Delta d$ ; in Durchsicht durch die Änderung des Lichtweges [Gl. (6)]:  $\alpha_D = (\partial/\partial x) \Delta s$ .

Aus der Messung des Lichtablenkwinkels in Durchsicht erhält man eine Resultierende aus Dickenänderung und Dichteänderung. Die Messung in Reflexion liefert die Dickenänderung allein. Beide Messungen zusammen ergeben die den Spannungszustand innerhalb der Scheibe beschreibenden Größen  $\Delta d$  und  $\Delta \rho$  und über die Lichtablenkungsfunktion  $F(f, d, \nu)$  die elastooptische Konstante  $b$ :

$$b_{dyn} = [1/(n F(f, d, \nu))] [\alpha_D/\alpha_R - (n-1)]. \quad (9)$$

### 3.3. Versuchsaufbau zur Messung der Dichte- und Dickenänderung

Abbildung 4 zeigt schematisch den Versuchsaufbau, mit dem die verschiedenen Anteile der Dichte- und Dickenänderung zur Lichtablenkung bestimmt wurden. Die durch die Belastung mit ebenen harmonischen Dehnungswellen verursachte Lichtablenkung des Laserstrahles in Durchsicht und in Reflexion wird von Lichtempfängern PHD und PHR in Spannungsschwankungen umgewandelt. Hierbei wird die radiale Helligkeitsverteilung des Laserstrahles

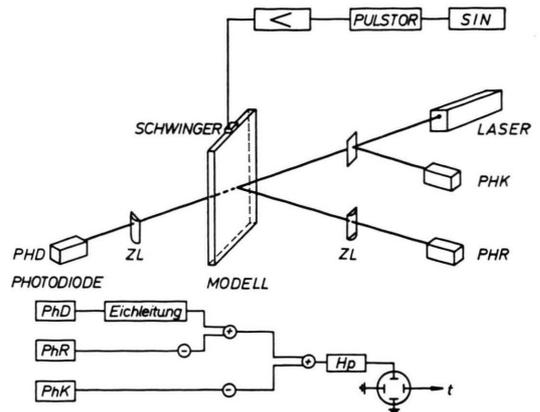


Abb. 4. Versuchsaufbau zur Messung der Lichtwegänderung in Reflexion und Durchsicht.

ausgenutzt. Die Zylinderlinsen sorgen dafür, daß nur die Lichtablenkungskomponente in Ausbreitungsrichtung der Dehnungswelle gemessen wird. Es wird jeweils das größere Signal bei festgehaltenem kleinerem Signal so weit gedämpft, bis die Differenz beider Signale ein Minimum ergibt.

Die Anteile des Laserrauschens werden mit Hilfe der Photodiode PhK durch eine weitere elektronische Differenzschaltung unterdrückt und durch einen nachgeschalteten Hochpaß HP die niederfrequenten Störungen ausgeblendet.

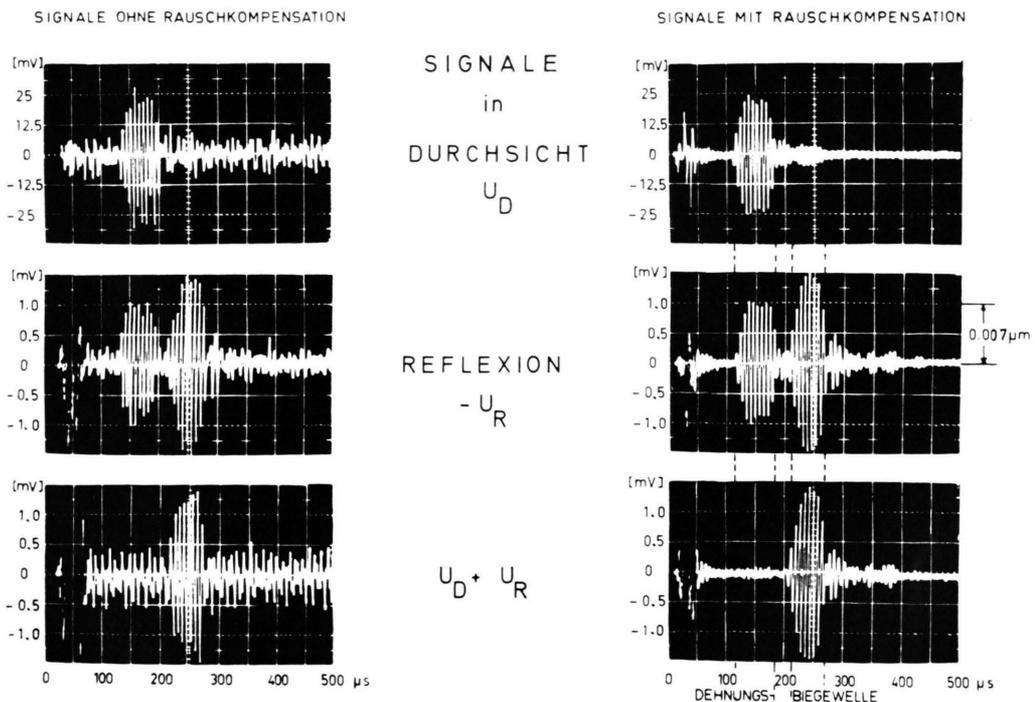


Abb. 5. Zeitlicher Verlauf der durch Dehnungswelle und Biegewelle hervorgerufenen Lichtwegänderung;  $f=150$  kHz;  $d=2$  mm,  $d/\lambda_s=0,213$ .

3.4. Die Ausgangssignale

Ein Beispiel für die Ausgangssignale ist in Abb. 5 wiedergegeben. Zwischen der linken und der rechten Serie kann man das Maß der Rauschunterdrückung deutlich erkennen (links ohne, rechts mit Rauschunterdrückung). Das Oszillogramm oben rechts rührt von der Lichtablenkung in Durchsicht her, das Oszillogramm darunter stellt die Lichtablenkung in Reflexion dar. Das erste Wellenpaket, das nach etwa 125  $\mu\text{sec}$  eintrifft, rührt von der Dehnungswelle her, das zweite nach etwa 200  $\mu\text{sec}$ , in diesem Falle stärker angeregte, von der Biegewelle, welche in Durchsicht nur eine schwache Störung verursacht. Da eine Anregung von Biegewellen nie ganz unterdrückt werden konnte, mußte eine Trennung der beiden Plattenwellen auf Grund der verschiedenen Gruppenlaufzeiten durch Wahl einer genügend langen Laufstrecke vorgenommen werden, woraus sich die geringe Oberflächenverformung erklärt. Die Signalspannung von 1 mV im mittleren Oszillogramm entspricht einer Lichtablenkung von 1,2'', d. h. bei einer Ultraschallwellenlänge von 15 mm einer Oberflächenverformung von 0,007  $\mu\text{m}$ . Das unterste Oszillogramm zeigt den nach der Differenzbildung übriggebliebenen Biegewellenanteil, der, da zeitlich getrennt, die Messung selbst nicht beeinflusst.

3.5. Meßergebnisse

In Abb. 6 sind die Meßergebnisse für verschiedene Scheibendicken und Anregungsfrequenzen zusammen mit der theoretisch berechneten Kurve aufgetragen. Bei den noch zu messenden Weglängenunterschieden  $\Delta s \sim 10^{-5}$  mm streuen die Meßpunkte um die theoretisch ermittelte Kurve für  $\nu = 0,325$  relativ wenig um  $\pm 10\%$ . Für die beiden letzten Meßpunkte ist die Lichtablenkungsfunktion  $F$  negativ. Dies heißt im Gegensatz zum ebenen Spannungszustand, daß bei einer US-Welle, die am Rand durch

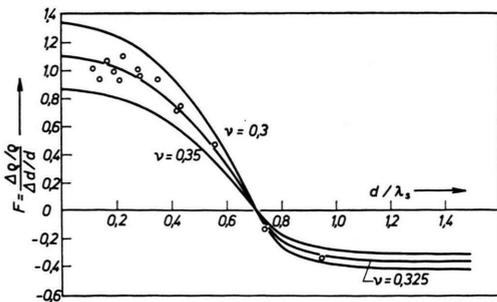


Abb. 6. Verhältnis der relativen Dichte- zur relativen Dickenänderung bei Dehnungswellen; ——— theoretischer Verlauf, ○ experimentelle Ergebnisse.

Druckbelastung angeregt wird, im Innern der Scheibe bei einer Dickenvergrößerung sogar die mittlere Dichte abnimmt.

3.6. Anteile der Dicken- und Brechungsindexänderung zur Lichtablenkung in Durchsicht

Mit der experimentell bestimmten elastooptischen Konstanten  $b$  und den theoretisch ermittelten Werten der Lichtablenkungsfunktion  $F$  bei bekanntem  $\nu$  läßt sich für verschiedene  $d/\lambda_s$  der Anteil der Dickenänderung  $\alpha$  zur Lichtablenkung in Durchsicht  $\alpha_D$  angeben:

$$\alpha/\alpha_D = [1 + [n/(n-1)] \cdot b F]^{-1}. \quad (10)$$

In Abb. 7 ist diese Funktion dargestellt. Zusätzlich ist der Beitrag der Brechungsindexänderung zur Lichtablenkung in Durchsicht aufgetragen. Die Nor-

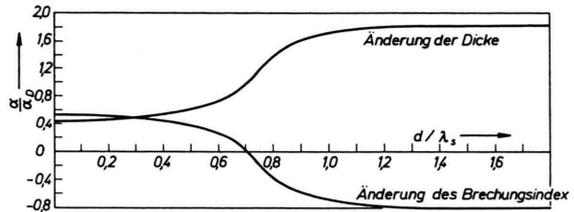


Abb. 7. Beiträge der Änderung von Dicke- und Brechungsindex zur Lichtablenkung in Durchsicht;  $\alpha_D = (d/dx) [(n-1) \Delta d + d \cdot \Delta n]$ .

mierung ist so gewählt, daß die Summe beider Anteile gleich 1 ist. In der Nähe von  $d/\lambda_s = 0$  (ebener Spannungszustand) sind die Beiträge etwa gleich groß und haben gleiches Vorzeichen. Mit zunehmendem  $d/\lambda_s$  nimmt der Beitrag der Dickenänderung zur Lichtablenkung zu, der Anteil der Brechungsindexänderung nimmt ab, geht gegen Null und dreht dann sein Vorzeichen um. Trotz des vorwiegenden Schubwellencharakters der Dehnungswelle, die für große  $d/\lambda_s$  in an den Scheibenoberflächen laufende Rayleigh-Wellen entartet, bleibt ein Beitrag der Brechungsindexänderung zur Lichtablenkung von  $-40\%$  des Dickenänderungsanteils bestehen.

$\nu$	0,325	3
$E_{\text{dyn}}$	60000 kp/cm <sup>2</sup>	3
$\mu$	22600 kp/cm <sup>2</sup>	3
$\lambda$	42000 kp/cm <sup>2</sup>	3
$c_t$	1370 m/sec	3
$c_l$	2690 m/sec	3
$c_R$	1280 m/sec	3
$n$	1,492	3
$\rho$	1,18 gr/cm <sup>3</sup>	
$a_{\text{Henschen}}$	$-1,06 \cdot 10^{-5}$ cm <sup>2</sup> /kp	1
$b_{\text{dyn}}$	$0,36 \pm 0,04$	3
$b_{\text{stat}}$	$0,30 \pm 0,07$	3

Tab. 1. Elastische und elastooptische Konstanten von Plexiglas.

<sup>3</sup> V. SCHMITZ, Diplomarbeit, Saarbrücken 1968.